

А. Б. КОВУРА, канд. физ.-мат. наук, А. П. КОЛОДЯЖНЫЙ, канд. техн. наук,
А. А. КОМАРОВ, с.н.с., В. Г. ТРОШИН, канд. техн. наук,
Днепропетр. ун-т

СПОСОБ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ ПРИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МДТТ

Рассматривается методика применения МКЭ к расчету нелинейных конструкций при произвольно изменяющихся во времени внешних нагрузках. Предложен способ решения дифференциального уравнения движения, состоящий в использовании метода Рунге-Кутты. Преимущество этого способа состоит в снятии ряда ограничений на вид дифференциального уравнения и снижении вычислительной трудоемкости расчета.

Необходимость учета изменяемости НДС во времени является характерной чертой целого ряда задач механики деформируемого твердого тела. К задачам такого класса можно отнести квазистатические задачи (расчет в условиях ползучести и вязкоупругости), задачи о свободных и вынужденных колебаниях, а также задачи определения отклика конструкции на резкое изменение нагрузки (импульс, удар и т.д.). При этом расчет может осложняться наличием пластических деформаций, геометрической нелинейности и других нелинейных эффектов.

Методы решения задач динамики можно разделить на две группы: методы, использующие аналитическое интегрирование уравнений движения (сводящие задачу к задаче на собственные значения) и методы прямого численного интегрирования по времени. Методы первой группы применяются в основном для решения линейных задач: хотя они были обобщены и на случай наличия нелинейности [6], для нелинейных задач стало традиционным использование прямого интегрирования. В этом случае, практически единственным применяемым на практике способом его реализации является использование конечно-разностных соотношений [3], хотя пути вывода этих соотношений могут быть различными и основываться на методе конечных разностей (МКР), конечных элементов (МКЭ), методе Галеркина и т.д. [7].

Разностные схемы, в свою очередь, делятся на явные (позволяющие вычислить вектор неизвестных для следующего момента времени непосредственно) и неявные (требующие решения системы уравнений). Явные схемы МКР характеризуются простотой реализации, однако они являются устойчивыми только при достаточно малой величине шага по времени, причем максимальная величина этого шага

пропорциональна величине h для конструкций с конечной массой и h^2 , если массой можно пренебречь, где h – размер наименьшего конечного элемента в дискретной модели [7]. Это приводит к необходимости выполнения достаточно большого объема вычислений и может быть причиной появления ошибок округления. Кроме того, такие схемы накладывают ограничения на свойства конструкции: сила сопротивления должна линейно зависеть от скорости.

Применяемые на практике неявные схемы МКР обладают, как правило, безусловнойходимостью, однако схемы низкого порядка не всегда обеспечивают требуемую точность для крупного шага по времени, а многоточечные схемы требуют нетривиального стартового алгоритма, наличие которого к тому же отрицательно сказывается на точности решения. Заметим также, что трудоемкость решения системы уравнений в неявной схеме пропорциональна квадрату числа степеней свободы дискретной модели.

Кроме явной и неявной схем МКР, была предложена так называемая "явно-неявная" схема [5], согласно которой для определения НДС основной части конструкции используется явная схема, а для элементов с очень малой или очень большой жесткостью – неявная. Для модельных задач такая схема потребовала меньших затрат, чем "классический" вариант, в то же время область ее эффективного применения ограничивается случаем конструкций с включениями или другими неоднородностями небольшого размера.

В настоящей работе предлагается способ интегрирования по времени, состоящий в использовании схем Рунге-Кутты. Эти схемы обладают некоторыми достоинствами, присущими как явным, так и неявным схемам, а также имеют ряд других свойств, делающих их весьма привлекательным средством решения динамических задач.

1. Основные соотношения МКЭ в нестационарных задачах. Использование конечно-элементной формулировки сводит динамическую задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения [7]

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x + f = 0, \quad (1)$$

где x – вектор неизвестных узловых параметров, $[K]$ и f – матрица жесткости конструкции и вектор сил (имеющие такой же смысл, что и для статических задач); $[M]$ и $[C]$ – матрица масс и матрица сопротивления, полученные суммированием соответствующих матриц отдельных конечных элементов

$$[M^{(0)}] = \int_{V^{(0)}} N \rho N^T dV, \quad [C^{(0)}] = \int_{V^{(0)}} N \mu N^T dV; \quad (2)$$

$V^{(0)}$ и N – объем и вектор функций формы i -го элемента, ρ – плотность материала, μ – коэффициент сопротивления, наличие которого

может быть вызвано трением при движении микроструктуры материала, сопротивлением воздуха и т.д.; точкой обозначена производная по времени.

Для упрощения расчетов после вычисления матрицы $[M]$ по формуле (2) ее обычно приводят к диагональному виду путем замены массы, распределенной по конечному элементу, на набор точечных масс, расположенных в узлах элемента. Именно из-за выполнения этой процедуры явные схемы МКР требуют очень малого числа операций для вычисления решения в очередной момент времени.

Было показано, что не всякий способ "диагонализации" приводит к сходимости получаемого решения. С математической точки зрения разнесение массы по узлам эквивалентно использованию при вычислении матрицы $[M]$ численного интегрирования сокращенного порядка с узлами интегрирования, расположенными в узлах конечного элемента. Для обеспечения сходимости необходимо, чтобы схема интегрирования позволяла вычислить точно интеграл от полинома p -го порядка $2(p-m)$, где p – порядок конечного элемента, m – наивысший порядок производной в функционале потенциальной энергии. Например, для прямоугольного квадратичного лагранжевого элемента ($p=2, m=1$) одно из возможных распределений общей массы, соответствующее применению интегрирования Гаусса-Лобатто составляет 1/36 для угловых узлов, 4/36 для срединных и 16/36 для внутреннего узла. При этом было продемонстрировано [4], что сходимость конечных элементов с разнесенной массой часто оказывается даже выше, чем для стандартных элементов.

Что касается матрицы сопротивления $[C]$, то распространенной практикой является задание ее (вместо вычисления по формуле (2)) в форме "сопротивления по Релею"

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K], \quad (3)$$

где α и β – некоторые коэффициенты, причем использование явных схем МКР требует принятия $\beta = 0$ либо, в противном случае, проведения диагонализации матрицы $[C]$.

2. Применение схем Рунге-Кутты для интегрирования по времени.

Учитывая перечисленные выше недостатки конечно-разностных схем интегрирования уравнения движения (1), весьма целесообразным является поиск путей повышения эффективности методики расчета.

Подходящей заменой соотношений МКР представляется использование методов Рунге-Кутты [2]. Особенности этих методов по сравнению со схемами МКР состоят в следующем:

- схемы Рунге-Кутты, так же как неявные схемы МКР, относятся к классу схем "предиктор-корректор"; это свойство в сочетании с отсутствием численного дифференцирования, являющегося неотъем-

лемой частью схем МКР, обуславливает хорошую устойчивость решения и возможность использования достаточно крупных шагов по времени;

- схемы Рунге-Кутты обладают высокой точностью: наиболее распространенной схемой является схема 4-го порядка, тогда как стандартные схемы МКР для уравнения (1) имеют 2-й порядок точности, не требуя специальных стартовых алгоритмов;
- схемы Рунге-Кутты являются явными схемами, т.е. не требуют решения системы уравнений для вычисления решения в очередной точке, хотя в них производится несколько вычислений правой части уравнения: четыре для схем 4-го порядка, а для схем МКР – только одно.

Важным вопросом, возникающим в связи с применением схем Рунге-Кутты к уравнению (1), является вопрос о том, как уравнение 2-го порядка можно решать с помощью схем, предназначенных для интегрирования уравнений 1-го порядка.

В работе [1] вектор ускорения \ddot{x} в уравнении (1) заменяется на его конечно-разностный эквивалент, а в полученное уравнение 1-го порядка интегрируется методом Кутты-Мерсона. При этом в [1] утверждается без доказательства и каких-либо ссылок, что использованная там 4-точечная разностная схема является безусловно устойчивой, хотя исследования сходимости, проведенные в [7] для различных схем (в том числе и 4-точечной схемы), показывают, что явные схемы МКР никогда не могут быть безусловно устойчивыми. Поэтому применение такого способа решения обладает теми же недостатками, что и явные схемы МКР.

Более целесообразным представляется преобразование уравнения (1) к системе из двух уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -[M]^{-1} \cdot ([C]y + [K]x + f). \end{aligned} \quad (4)$$

Удвоение числа неизвестных параметров не приводит к увеличению затрат на решение уравнения. Кроме этого, использование системы (4) не накладывает каких-либо ограничений на вид матрицы $[C]$, допуская наличие нелинейной зависимости силы сопротивления от скорости y .

Если конструкция обладает геометрической либо физической (пластичность, ползучесть, вязкоупругость и т.д.) нелинейностью, матрица жесткости $[K]$ становится нелинейно зависящей от вектора параметров x . При этом произведение $[K]x$ удобнее вычислять по формуле [7]:

$$[K]x = \sum_{i=1}^n \int_{V^{(i)}} [B]^T \sigma dV, \quad (5)$$

где n – число конечных элементов, $V^{(i)}$ – объем i -го элемента, $[B]$ и σ – матрица связи деформаций с перемещениями и вектор напряжений в текущей точке элемента. Знаком суммы обозначено суммирование с преобразованием локальных степеней свободы в глобальные. Приме-

нение соотношения (5) делает ненужным вычисление локальных и глобальной матриц жесткости и существенно снижает вычислительные затраты.

Для ускорения расчетов при применении методов Рунге-Кутты, так же как и при применении схем МКР, эффективным оказывается использование переменного шага по времени и чередование прямого вычисления правой части уравнения с ее экстраполяцией по вычисленным ранее значениям. После определения значений неизвестных в узловых точках значения в промежуточных точках интерполируются полиномами Эрмита 5-го порядка.

С использованием разработанной методики были проведены расчеты отклика сферического купола на шаговое распределенное давление (рис. 1а). Внутренний радиус купола

$R = 0,566$ м, толщина $h = 0,01$ м, угол полураствора $\alpha = 26,67^\circ$, модуль упругости $E = 1,62 \cdot 10^5$ МПа, коэф. Пуассона $\nu = 0,3$, напряжение текучести $\sigma_\gamma = 372$ МПа, тангенциальный модуль на участке упрочнения $E_\gamma = 3,26 \cdot 10^3$ МПа, плотность $\rho = 145$ Н/м³, значение шаговой нагрузки $p = 9,3$ МПа. Половина конструкции разбивалась на 10 осесимметричных 8-узловых квадратичных прямоугольных среднетиповых конечных элемента.

На рис. 1б приведены кривые вертикального перемещения W_A центра купола в зависимости от времени. Кривая 1 построена в предположении геометрически линейного деформирования, а кривая 2 – с учетом конечных перемещений.

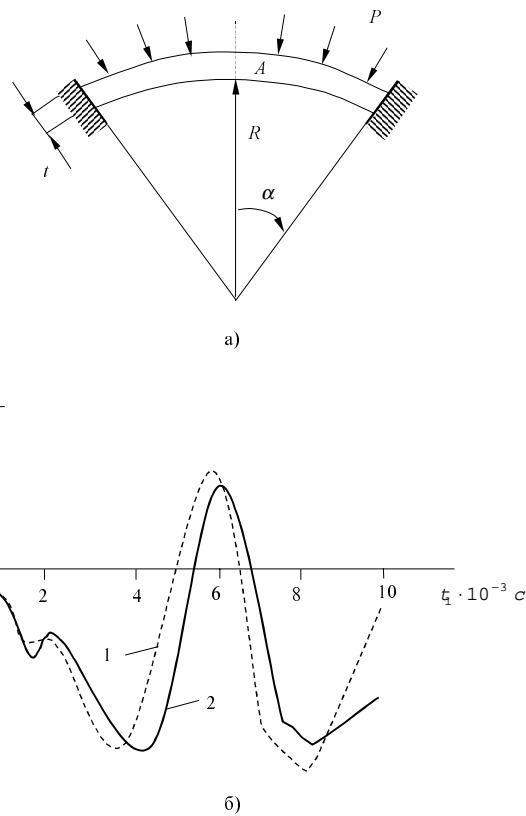


Рис. 1

- а) Сферический купол и его дискретная модель
- б) Зависимость вертикального перемещения центра купола от времени

Таким образом, разработанная методика интегрирования по времени позволяет повысить эффективность решения динамических задач и распространить область применения явных схем интегрирования на случай нелинейного сопротивления.

Список использованной литературы

1. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов / Под общ. ред. В. И. Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
2. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
3. Finite element systems, A handbook / Ed. by C. A. Brebbia. – Springer-Verlag, 1985. – 768p.
4. Fried I., Melkus D. S. Finite element mass matrix lumping by numerical integration with convergence rate loss // Int. J. Solid Struct. – 1975. – 11. – p. 461-465.
5. Hughes N. J. R., Rister K. S., Taylor R. L. Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1979. – 17-18. – p. 159-182.
6. Nickell R. E. Nonlinear dynamics by mode superposition // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1976. – 7. – p. 107-109.
7. Zienkiewicz O. C. The finite element method. – London: McGRAWHILL, 1977. – 788 p.

Поступила в редколлегию 17.03.98